Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta …*.078**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(2, 4, 6)$ la planul $x + y + z - 6 = 0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2 - 3y^2 = 1$ dusă prin punctul $P(2,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1, 2,0)$, $M(2, 3,0)$ și $N(3, 4,0)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 3, 2)$, $B(3, 2, 1)$, $C(2, 1, 3)$ și $D(2, 4, 6)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $E(1, 1)$ și $F(2, 3)$ să aparțină dreptei $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze produsul matricelor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(3p) **d)** Să se determine rangul matricei $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + \ln(x^2 + 1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{3x^3 + 4} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul complex $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbf{R}$ şi notăm $\overline{z} = a - bi$.

(4p) **a)** Să se calculeze $z + \overline{z}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $z \cdot \overline{z}$.

(4p) **c)** Să se verifice că $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

(2p) **d)** Să se determine $c, d \in \mathbf{R}$, ştiind că numărul complex $x = 3 + 4i$ verifică ecuaţia $x^2 + cx + d = 0$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, există $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, astfel încât $z^n = a_n \cdot z + b_n$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru $\forall w \in \mathbf{C}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, există polinomul cu coeficienţi reali $f = X^n + pX + q$, cu proprietatea că $f(w) = 0$.

(2p) **g)** Să se arate că numărul complex $x = 3 + 4i$ nu poate fi rădăcină pentru nici un polinom $g \in \mathbf{R}[X]$, de forma $g = X^{2007} + r$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$ şi şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$,
$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = a_n - f(n)$, $c_n = a_n - f(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k > 0$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\forall k \in (0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

(2p) **f)** Să se arate că şirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **h)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.